可約指数について : 鈴木氏の話へのIntroduction (Buchsbaum環とgeneralized Cohen-Macaulay環の研究)

青山, 陽一

数理解析研究所講究録
465巻 1982年 1-6

可約指数について —— 鈴木氏の話への introduction

愛媛大 理　　青山陽一

このノートでは，可約指数に関し筆者が興味を感じたことについて記し，鈴木氏の話への introduction としたい。時代順に論文をピックアップして書いていくが，関係のある論文をすべてリストアップしたものではない。以下，A は極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ d 次元のネーター局所環であるとする。$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアル，$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ を既約イデアルによる無駄のない分解とするとき，t は分解の仕方によらないこと，及び $t=\ell(\mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q})=\dim_{A/\mathfrak{m}}\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{q})$ であることが知られている。（[1, Satz IV]　なお [3] も参照）

[1] E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. 83 (1921) 24 - 66.

この不変量 t を $\mathfrak{q}$ の可約指数と呼び，$ir(\mathfrak{q})$ 或いは $N(\mathfrak{q})$ で示す。（[3, Definition 2]）　Gröbner は " A が regular のとき，任意の parameter ideal（= s.o.p. で生成された ideal）は既約である" を示

した。（彼の定理の元の形を現在の用語で書くと，"R を Cohen-Macaulay 整域，$\mathfrak{a}$ を principal ideal class (i.e. $\mathrm{Rt}\,\mathfrak{a} = \nu(\mathfrak{a})$ = 極小生成系の個数)，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ の素因子で $R_{\mathfrak{p}}$ が regular なるものとすると，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{p}$-準素成分は既約"）（[2, Satz]）

[2] W. Gröbner, Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen, Monatsh. Math. 55(1951) 138 - 145.

Northcott は上の結果を次の様に拡張した。"A が Cohen-Macaulay のとき，parameter ideal の可約指数は s.o.p. のとり方に依らない A の不変量である。"（[3, Theorem 3]）

[3] D. G. Northcott, On irreducible ideals in local rings, J. London Math. Soc. 32(1957) 82 - 88.

ここで鈴木敏氏（京大・教養）より教えてもらった（1975 夏）証明法を書いておこう。まず２つ補題を用意する。（証明は略す）

Lemma 1 (S. Suzuki). R を環，M を R-加群 $(\neq 0)$，$M \supset (0) = N_1 \cap \cdots \cap N_t$ を既約部分加群 $(\neq M)$ による分解とするとき，次は同値：

(a) $M \xrightarrow{nat.} M/N_1 \oplus \cdots \oplus M/N_t$ が essential monomorphism である。

(b) 分解に無駄がない。

Lemma 2 (?). R を環，M を R-加群 $(\neq 0)$，N を M の essential 部分加群，$M \supset (0) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を無駄のない既約分解とすると，$Q_i' = Q_i \cap N$ は N の既約部分加群で，$N \supset (0) = Q_1' \cap \cdots \cap Q_t'$ は無駄のない既約分解である。

(Proof of [3, Theorem 3]) d に関する帰納法。$d=0$ のとき，$0:\mathfrak{m} \subsetneq A$ は essential だから Lemma 2 よりベクトル空間の話になる。
$d=1$ のとき。x, y を非零因子とする。$A/(y) \underset{x}{\cong} (x)/(xy) \hookrightarrow A/(xy)$ が essential であることを示し，Lemma 2 を使い $ir(y)=ir(xy)=ir(x)$ を得る。$d>1$，$d-1$ まで正しいとする。$x_1,\ldots,x_d$，$y_1,\ldots,y_d$ を各々 s.o.p. とする。$\exists z$ s.t. $x_1,\ldots,x_{d-1},z$，$y_1,\ldots,y_{d-1},z$ が各々 s.o.p. だから帰納法により主張を得る。(by S. Suzuki)　(q.e.d.)
更に Northcott-Rees は次の興味ある定理を証明した。"任意の parameter ideal が既約ならば，Cohen-Macaulay である。"（[4, Theorem 1]）

[4] D. G. Northcott & D. Rees, Principal systems, Quart. J. Math. Oxford (2) 8(1957) 119 - 127.

ここで，下田の補題を使う山岸氏の証明を紹介しよう。
Lemma (Shimoda). $a(\neq 0) \in \mathfrak{m}$ で，$0:a = 0:a^2$ とする。(a^2) が既約ならば，a は非零因子である。
(Proof of [4, Theorem 1]) $a_1,\ldots,a_t$ を sub s.o.p. とする。任意の $e_1,\ldots,e_t$ に対し $(a_1^{e_1},\ldots,a_t^{e_t})$ が既約ならば $a_1,\ldots,a_t$ は regular sequence を示せばよい。t に関する帰納法。$t=1$ のときは上の Lemma による。$t>1$，$t-1$ まで正しいとする。$B=A/(a_2^e,\ldots,a_t^e)$ とおく。$a_1^f B$ は既約 for $\forall f>0$ だから a_1 は B-regular。$0:a_1 = \bigcap_{e>0}(a_2^e,\ldots,a_t^e):a_1 = \bigcap_{e>0}(a_2^e,\ldots,a_t^{e_t}) = 0$ より a_1 は A-regular。$A/(a_1)$ で考えて帰納法により主張を得る。(by Yamagishi)　(q.e.d.)

Berger は1次元 Gorenstein 局所環（彼の用語では unvergabelt）の研究を行ない，その中で“1次元 Cohen-Macaulay 局所環で極大イデアルが2個の元で生成されるものは Gorenstein である”を示し，その様な局所環を分類した。（[5, Satz 2 & Satz 4]）

[5] R. Berger, Über eine Klasse unvergabelter lokaler Ringe, Math. Ann. 146(1962) 98 - 102.

Endo-Narita は Berger の結果を次の様に拡張した。“A の parameter ideal の可約指数が s.o.p. のとり方によらない A の不変量で，それが $d+1$ 個の元で生成されるならば，A は Gorenstein である”更に，“Cohen-Macaulay でなくて，parameter ideal の可約指数が s.o.p. のとり方に依らない局所環が存在する”ことを示した。（[6, Theorem 1 & Theorem 2]）

[6] S. Endo & M. Narita, The number of irreducible components of an ideal and the semi-regularity of a local ring, Proc. Japan Acad. 40(1964) 627 - 630.

今まで述べてきたようなところから，可約指数の概念は重要なものであろうと思われるし，（事実，Cohen-Macaulay 環の場合には重要な役割を持ち，その理論が作られている） その役割はどうなのであろうかという想いがする。Cohen-Macaulay でなくて parameter ideal の可約指数が s.o.p. のとり方に依らない局所環は存在するし，また parameter ideal の可約指数が s.o.p. を

動かしたときに有界でないような局所環も存在する。そこでまず，可約指数一定の局所環，或いは可約指数有界の局所環は，どの様なものであろうかと云う疑問が湧く。そして，その様な場合に他の不変量との関係はどうかとか。そして更には............

何かしら訳の判らない，まとまりのないものを書いてきてしまったが，最後に文献を補足して，このノートを終ることにしたい。

[7] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963) 8 - 28.

[8] G. Eisenreich, Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. Band 109 Heft 3, Akademie Verlag, 1970.

[9] W. Gröbner, Über irreducible Ideale in kommutativen Ringen, Math. Ann. 110(1934) 197 - 222.

[10] W. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie, Wien-Innsbruck 1949.

[11] W. Krull, Idealtheorie (zweite, erganzte Auflage), Ergeb. Math. Grenz. 46, Springer Verlag, 1968.

[12] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems,

Camb. Univ. Press, 1916.

[13] H. Seydi, Une remarque sur les anneaux de Cohen-Macaulay, Bull. Sc. Math. (2) 96(1972) 155 - 160.